Διάλεξη 8η : Πέμπτη 14 Απρίλη 2016, 6-9 μ.μ.

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

ΘΕΜΑ: Προβλήματα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green

- **Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών**

  Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (εξίσωση δεύτερης τάξης)

$$\begin{aligned} x''(t) &= f(t, x(t)) \\ x(0) = a, &\qquad x(1) = b \end{aligned}$$

  ανάγεται στην ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$x(t) = a + (b-a)t - \int_0^1 K(t,s) f(s, x(s)) ds$$

  με πυρήνα

$$K(t,s) := \begin{cases} 1-t, & 0 \le s \le t \\ 1, & 0 \le t \le s. \end{cases}$$

  (που δεν εξαρτάται από την συνάρτηση f αλλά από τις συνοριακές τιμές).

- **Το γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και η συνάρτηση Green**
  Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$L[y] := y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t), \quad t \in [0,1]$$

  και τις (γραμμικές) συνοριακές τιμές

$$\begin{aligned} C_1[y] &:= c_1 y(0) + c_2 y'(0) + c_3 y(1) + c_4 y'(1) = A \\ C_2[y] &:= d_1 y(0) + d_2 y'(0) + d_3 y(1) + d_4 y'(1) = B. \end{aligned}$$

- Βήμα 1: Το ομογενές πρόβλημα.
  Θεωρούμε το πρόβλημα που απαρτίζεται από την ομογενή εξίσωση $L[y] = 0, \quad t \in [0,1]$ και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες $C_1[y] = 0, C_2[y] = 0$, δηλαδή το πστ

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = 0, &\quad t \in [0,1] \\ c_1 y(0) + c_2 y'(0) + c_3 y(1) + c_4 y'(1) &= 0 \\ d_1 y(0) + d_2 y'(0) + d_3 y(1) + d_4 y'(1) &= 0. \end{aligned}$$

  Σχετικά με την ύπαρξη μη μηδενικών λύσεων έχουμε την επόμενη πρόταση.

  ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης L_0.
  Τότε το ομογενές πστ $L_0 - C_0$ δέχεται και μη μηδενικές λύσεις άν και μόνον αν

$$D(y_1, y_2) := \begin{bmatrix} C_1[y_1] & C_1[y_2] \\ C_2[y_1] & C_2[y_2] \end{bmatrix} = 0.$$

  Απόδειξη.

  Παράδειγμα.

Πόρισμα. Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης L_0, τότε το ομογενές πστ δέχεται άπειρο πλήθος λύσεων άν και μόνον αν
$$D(y_1, y_2) = 0.$$

Παράδειγμα.

- Βήμα 2 Ύπαρξη λύσεων για το μη ομογενές πστ.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα βασικό σύνολο της ομογενούς εξίσωσης L_0.
Τότε το μη ομογενές πστ $L_r - C$ έχει μία ακριβώς λύση αν και μόνον αν το ομογενές πστ $L_r - C$ έχει μόνον την μηδενική λύση. [Δηλαδή αν και μόνον αν είναι $D(y_1, y_2) \neq 0$..]
Απόδειξη.

Παραδείγματα. (πστ με άπειρο πλήθος λύσεων - χωρίς λύσεις - κ.α.)

- Η αναγωγή του πστ
$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = b(t), \quad y(0) = 0 = y'(1).$$
σε ολοκληρωτική εξίσωση.

Ο πυρήνας $K(t, s)$ είναι μια συνάρτηση (συνάρτηση Green) δύο μεταβλητών που έχει ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τον πυρήνα αυτόν και μόνον αυτόν, δηλ. είναι η μοναδική συνάρτηση δύο μεταβλητών με αυτές τις ιδιότητες. Η δυνατότητα να κατασκευάζουμε τον πυρήνα με βάση τις ιδιότητες αυτές αντί της κατασκευής κατευθείαν από το πστ.

Παράδειγμα.

- ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Χρήση της συνάρτησης συνάρτηση Green για εκφράσεις λύσεων σε μη γραμμικά προβλήματα συνοριακών τιμών. Ιδιότητες των λύσεων κάνοντας χρήση ιδιοτήτων των (ήδη γνωστών) συναρτήσεων Green.

Παράδειγμα.